Как вы знаете, уравнение Лапласа можно решать с помощью функции Грина. С помощью функции Грина можно решить и более сложное уравнение – Гелемгольца.

В частности, фундаментальным решением неоднородного уравнения Гелемгольца

$$\Delta u + k^2 u + F = 0$$

(можно записать и как $\Delta u + k^2 u = F$, но я буде придерживаться обозначений Буткарёва).

Где F – некая функция, которая вполне может зависеть от точки пространства – в каждой точке M F(M) может быть своя. Объёмная плотность источников, можно сказать.

Тогда ответ запишется как:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\partial u}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right) d\sigma_P +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int F(Q) \frac{e^{ikR_{MQ}}}{R_{MQ}} dV_Q$$

Если уравнение Гелемгольца будет таким

$$\Delta u + æ^2 u + F = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}}$$

То решение будет таким же, только надо будет заменить на

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ærr_{MQ}}}{r_{MQ}}$$

Это всё касалось 3D. В 2D надо будет заменить на:

$$\frac{1}{2\pi} H_0^{(1,2)}(kr) \text{ в случае } k$$

$$\frac{1}{2\pi} K_0(ær) \text{ в случае } æ$$

Физический смысл.

Как мы видим, в 3D уравнению Лапласа соответствует функция Грина 1/r, а дифференциальному оператору $\Delta u + k^2 u$ вот такая: $\frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}}$

Где вообще возникает уравнение Гельмгольца? Оказывается, если мы возьмём уравнения Максвелла и положим, что поле меняется синусоидально:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0(\vec{r})e^{i\omega t}$$

то для каждой из 3 проекций $\vec{E}$ и $\vec{B}$ будет выполняться k-уравнение Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta E_{x0}(\vec{r}) + k^2 E_{x0}(\vec{r}) = 0 \\ \Delta E_{y0}(\vec{r}) + k^2 E_{y0}(\vec{r}) = 0 \\ \Delta E_{z0}(\vec{r}) + k^2 E_{z0}(\vec{r}) = 0 \\ \Delta B_{x0}(\vec{r}) + k^2 B_{x0}(\vec{r}) = 0 \\ \Delta B_{y0}(\vec{r}) + k^2 B_{y0}(\vec{r}) = 0 \\ \Delta B_{z0}(\vec{r}) + k^2 B_{z0}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

Где $k = \frac{\omega}{c}$.

Я написал в правой части нули, на самом деле там может быть и конструкция из зарядов и токов – источников э/м волн.

Так что k-уравнение Гельмгольца описывает синусоидальные э/м волны. Поэтому и функция Грина и имеет вид $\frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}}$: мнимая экспонента в числителе соответствует синусоидальности, а 1/r обеспечивает затухание.

А что, если граничные условия нетривиальны?

Давайте посмотрим:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = -F(\vec{r}) \text{ в круге радиусом } a \\ u|_S = f(P) \end{cases}$$

Делается точно также, как для оператора Лапласа: ф-ция Грина ищется в виде суммы операторной и граничной части:

$$\begin{cases} G(M,Q) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}} + v(M) \\ \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}} + v(M) = 0 \text{ на границе} \end{cases}$$

И мы получаем краевую задачу 4 Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 \\ \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr_{MQ}}}{r_{MQ}} = -v(M) \text{ на границе} \end{cases}$$

Найдя v, а вслед за ней и функцию Грина, можем записать решение как

$$u(M) = -\oint f(P)\frac{\partial}{\partial n_P} G(M,P)\,d\sigma_P + \int F(Q)\,G(M,Q)\,dV_Q$$

Это k-уравнение в 3D, если æ – заменяем на $\frac{e^{-æ R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}$, если 2D – заменяем на функцию Ханкеля или Макдональда, в общем, я это выше уже расписал.

Пример!

$$\begin{cases} \Delta u - æ^2 u = F(\vec{r}) \text{ в круге радиусом } a \\ u|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

Берём готовую главную, операторную часть функции Грина для æ-уравнения в 2D:

$$\frac{1}{2\pi} K_0(æ r)$$

И вместо задачи на u получаем задачу для v:

$$\begin{cases} \Delta v - æ^2 v = 0 \text{ в круге радиусом } a \\ v(P)|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi} K_0(æ r_{PM}) \end{cases}$$

Ищем решение в виде разложения по решениям однородного æ-уравнения, т.е. функциям Инфельда:

$$V_n = I_n(æ) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

$$V = \frac{A_0}{2} \cdot \frac{I_0(æ r)}{I_0(æ a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(æ r)}{I_n(æ a)} \left(A_n \cos n(\varphi - \varphi_0) + B_n \sin n(\varphi - \varphi_0)\right)$$

А теперь надо разложить ГУ (с функцией Макдональда) по этим функциям (Инфельда). Тут нам помогут формулы с лекций:

$$K_0(æ R) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i æ R);$$

$$H_0^{(1)}(R) = J_0(r_0) H_0^{(1)}(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(r_0) H_n^{(1)}(r) \cos n(\varphi - \varphi_0)$$

Эти лекционные знания помогут написать ГУ с функцией Макдональда как

Тогда

$$K_0(\varkappa R) = I_0(\varkappa r_0) K_0(\varkappa r) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varkappa r_0) K_n(\varkappa r) \cos n(\varphi - \varphi_0)$$

r_0, φ_0 – хар-ки точки M_0.

Подставляем в ГУ

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n(\varphi - \varphi_0) + B_n \sin n(\varphi - \varphi_0) = -\frac{1}{2\pi} I_0(\varkappa r_0) K_0(\varkappa a) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varkappa r_0) K_n(\varkappa a) \cos n(\varphi - \varphi_0)$$

Ну чё я могу сказать: в правой части синусов нет, поэтому все $B_n=0$. А вот A_n будут не нули:

$$\forall B_n = 0, \quad A_0 = -\frac{1}{\pi} I_0(\varkappa r_0) K_0(\varkappa a);$$

$$A_n = -\frac{1}{\pi} I_n(\varkappa r_0) K_n(\varkappa a)$$

Осталось подставить все A_n в выражение для v, после чего найти уже функцию Грина

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}} + V$$